

O SERPENTEAR DOS TRAVERTINOS E A REFLEXÃO DAS ONDAS MECÂNICAS NA ÁGUA

THE SERPENT OF TRAVERTINE AND THE MECHANICAL REFLECTION OF WAVES IN WATER

Marcelo dos Santos Silvério

GELS – Grupo de Espeleologia Laje Seca / FATEC Itapetininga.

Contatos: profmarcelo@uol.com.br.

Resumo

Este artigo apresenta as formas de propagação das ondas mecânicas sobre a água nas represas de travertinos. Os diques naturais presentes no carste de muitas cavernas, com estrutura rígida e, em sua maioria, formado por carbonato de cálcio, podem represar a água ou formar uma barreira parcial ao seu movimento, permitindo a formação de curvas de níveis naturais e possivelmente evitando outras formas de erosão. Nos travertinos cheios, a precipitação de gotas do teto ou outros elementos formam ondas mecânicas na água, que ao tocarem em seus contornos, por seu formato serpenteado, produzem uma reflexão divergente e dissipam sua energia, provados por modelos matemáticos. Com propagação radial a intensidade dessas ondas mecânicas diminui no meio, não focando a possível energia de refração num único ponto do espeleotema.

Palavras-Chave: travertino, ondulatória, ondas mecânicas, caverna, espeleologia.

Abstract

This article presents the propagation forms of the mechanical waves on the water in the travertine dams. These natural levees in the karste of many caves, presenting rigid structure and mainly formed by calcium carbonate, can dam the water or possibly form a partial barrier to its movement, allowing the formation of natural contour lines that prevent some forms of erosion. In the full gours, the precipitation of water drops from the roof, or other materials, create mechanical waves in the water, that when touch the wall of these rimstones with "serpent morphology", produce a divergent reflection and dissipate its energy, as mathematical models can prove. The intensity of these mechanical waves reduces with radial propagation in the environment, with no concentration of the possible refraction energy at a particular point of the speleothem.

Key-words: travertine, rimstone, gours, undulatory, cave, speleology, wave.

1 - INTRODUÇÃO

Dentre os inúmeros espeleotemas que as cavidades naturais apresentam, as represas de travertinos trazem algumas características peculiares. Seus diques podem estar secos, cheios ou transbordando e assim como outras feições cársticas, tiveram sua origem vinculada à água.

Este artigo não focaliza se na gênese dos travertinos e sua formação lenta e em escala microscópica, pois algumas relevantes pesquisas já foram realizadas nesta área, como será citado adiante. Da mesma forma, a aparência sinuosa, em conchas, muralhas, terraços e outros já foram alvos de pesquisa cuja ênfase era seu aspecto macroscópico.

O objeto deste estudo é o comportamento das ondas mecânicas sobre a água represada por travertinos em ambiente subterrâneo. O local escolhido para coleta de dados foi a Gruta dos

Paiva. Foram realizados experimentos com elementos exógenos ao meio para produção das ondas e coletados dados para as relações matemáticas.

Na linha dessa visão macroscópica dos espeleotemas, esse artigo pretende apresentar padrões sobre o movimento harmônico simples, especificamente na ondulatória bidimensional da superfície da água contida em travertinos. São gerados modelos matemáticos acerca da sua aparência e dissipação, sua reflexão e possível influência na resistência das represas.

2 - METODOLOGIA

Para esta pesquisa optou-se como local de coleta de dados a Gruta dos Paiva, SP-042, entre os municípios de Ribeirão Grande e Iporanga (SP), com acesso pelo Parque Estadual de Intervales. Esta caverna possui um desenvolvimento linear de 3808

m e desnível de 51 m, segundo topografia do GPME de 2002. A área de visitação pública restringe-se às galerias inferiores, com um número relativamente grande de travertinos secos, cheios e em períodos das águas, transbordando. Em seus salões superiores existem inúmeros espeleotemas e como destaque um gigantesco ninho de pérolas, logo abaixo de um longo terraço de travertinos.

Os materiais e instrumentos utilizados para coleta de dados foram: uma trena laser da marca Bosch, oito esferas de isopor de 35 mm, máquinas fotográficas, tripés, filmadora, equipamentos de iluminação elétrica com leds.

Durante a coleta de dados, procuraram-se ângulos fotográficos que permitissem observar as ondas produzidas na água que escorria sobre os travertinos, num primeiro momento, sem a interferência humana, utilizando tripés ou não, porém distante da água.

Posteriormente usaram-se as esferas de isopor para produzir ondas circulares sobre as águas represadas nos travertinos e permitir fotografias que indicavam a propagação e reflexão das ondas. Finalmente observou-se o comportamento das esferas de isopor sobre efeito das ondas e do fluxo natural de água.

Todos os materiais e instrumentos usados foram retirados da caverna após a coleta de dados. Observou-se que nenhum dano macroscópico foi causado ao ambiente. Optou-se por coletar a maior quantidade de dados da área turística da caverna, evitando interferência ao meio na área restrita, onde apenas fotografias de travertinos secos foram tiradas.

3 - DISCUSSÃO E RESULTADOS

3.1 - Travertinos e ondas mecânicas: conceitos elementares.

Algumas pesquisas apontaram fortes indícios inorgânicos e orgânicos sobre a gênese dos travertinos. Segundo Hill e Forti (1997) o crescimento dos travertinos pode estar vinculado à precipitação do carbonato de cálcio e outros minerais, que se cristalizam na rocha após perda do dióxido de carbono na tênue linha de fronteira da água. Já Chafetz & Folk (1984) mostraram, há anos, que a presença de bactérias em cristais de calcita contribui na adesão dos materiais e na formação dessas represas.

Do ponto de vista macroscópico, os travertinos podem apresentar padrões como bacias

côncavas, escadas em terraços ou como barreiras serpenteando o solo, sendo um espaço propício para a formação outros espeleotemas como vulcões, jangadas e cristais dentes de cão. São formações espeleológicas de grande beleza e podem ser modelados matematicamente através de funções em coordenadas cartesianas, polares ou através de fractais, apresentando tendências cíclicas em seu aspecto (SILVÉRIO, 2007).

Por outro lado, o conhecimento do movimento harmônico simples tem levado a resultados com aplicações em diversas áreas como a medicina, a geologia, as engenharias etc. A Ondulatória estuda o fenômeno de transmissão de uma perturbação num determinado trajeto entre dois pontos sem que haja transporte de matéria. Numa onda propagam-se simplesmente energia e quantidade de movimento (ALVARENGA E MÁXIMO, 2008).

Quando uma gota ou material cai sobre a superfície da água represada em um travertino provoca uma instabilidade no meio. As fezes de um morcego no teto, por exemplo, antes de caírem contém energia potencial que se transforma gradativamente em energia cinética durante a queda. A superfície da água é plana e horizontal, mas ao ser atingida pelas fezes sofre uma perturbação em seu estado de equilíbrio. Esse impacto causa um deslocamento das moléculas imediatamente abaixo da superfície de contato criando um vale e, logo em seguida, o movimento das moléculas laterais, que preencherão esse vale. Segundo Gato (2003), as ondas sobre a superfície da água resultam dessa elasticidade do meio que permite um movimento de balanço e vibração.

Uma onda transporta energia, mas não transporta matéria. Porém, parte dessa energia transportada pode se transferir por refração para outro meio, criando ou não uma ressonância. Quando toca a matéria, parte dessa onda pode ecoar na forma de reflexão e voltar ao meio de onde foi emitido. Na figura 1 temos o esquema simplificado de uma onda, com suas cristas e vales. Chamamos de comprimento de onda a distância entre duas cristas e período é o tempo necessário para que duas cristas passem por um determinado ponto. A velocidade de uma onda é o produto entre o comprimento de onda e a frequência, ou seja, o número de cristas que passam por um ponto num determinado período de tempo.

Quando o travertino apresenta-se como uma represa de água parada em relação à sua borda (situação ideal para o surgimento de vulcões), cada

gota que nela cai gera uma onda cuja energia forma cristas e vales com propagação radial e aparência de círculos concêntricos (figura 2). Por outro lado, quando o travertino contém água em movimento, escoando para jusante, a componente horizontal do vetor deslocamento da água pode apresentar o efeito Doppler dependendo do observador. A fonte emissora da onda pode não ser pontual, como uma cascata, não necessariamente produzindo ondas de propagação radial.

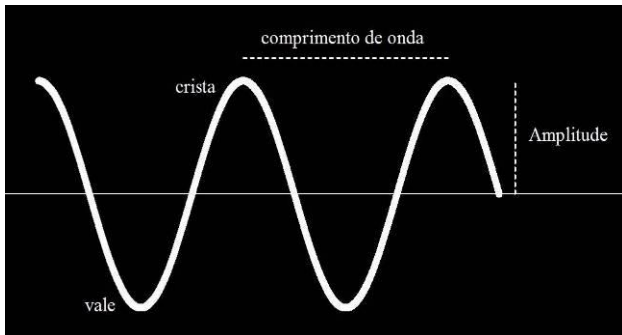


Figura 1: Elementos de uma onda bidimensional

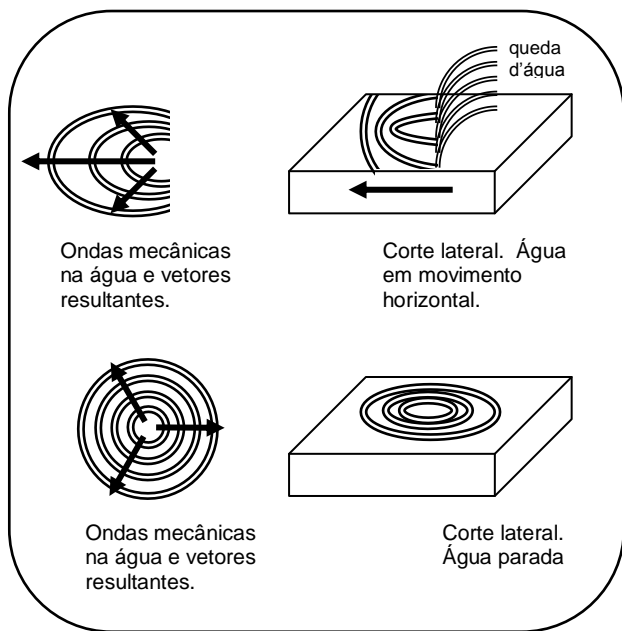


Figura 2: Vetor deslocamento da onda sobre água no travertino.

Esse esquema apresentado na figura 2 pode ser comprovado com a imagem fotográfica das figuras 3 e 4. Na primeira imagem, o travertino fotografado faz parte de um terraço, onde a água escorre sobre ele. É possível observar pelo comprimento de onda que há diferenças entre a direção, o módulo e o sentido dos vetores. Quanto maior o fluxo de água na queda, maior a energia produzida e, portanto maior a intensidade da onda.

Por outro lado, na figura 4, o módulo dos vetores mantém-se o mesmo, visto que não há componente horizontal da velocidade da água, que está estática. Assim, as ondas propagam-se de maneira radial, apresentando em cada instante suas cristas como cilindros concêntricos sobre a superfície da água.



Figura 3: Com a água em movimento, a fonte emissora de energia pode influenciar na propagação de ondas em relação ao referencial pelo efeito Doppler.

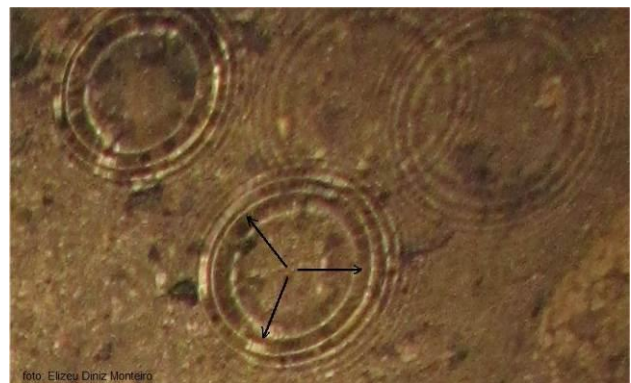


Figura 4: Com a água estagnada não há componentes vetoriais para compor a resultante, exceto a própria componente radial de propagação das ondas.

Quando ocorre a superposição de ondas, as interferências são chamadas de construtivas ou destrutivas, cuja amplitude total obtida é a soma algébrica da amplitude das ondas superpostas. Assim, duas cristas se superpõem originando cristas com grande amplitude em relação às cristas parciais. Da mesma forma, dois vales terão também grande amplitude, construindo-se assim a partir das ondas parciais. Por outro lado, quando uma crista se sobrepõe a uma vale de outra onda, ocorre uma interferência destrutiva, onde a superfície da água pode estar no nível de equilíbrio.

O fenômeno de propagação de onda observado permitiu notar a grande importância que os formatos padronizados e serpenteados dos travertinos têm sobre a reflexão dessa onda.

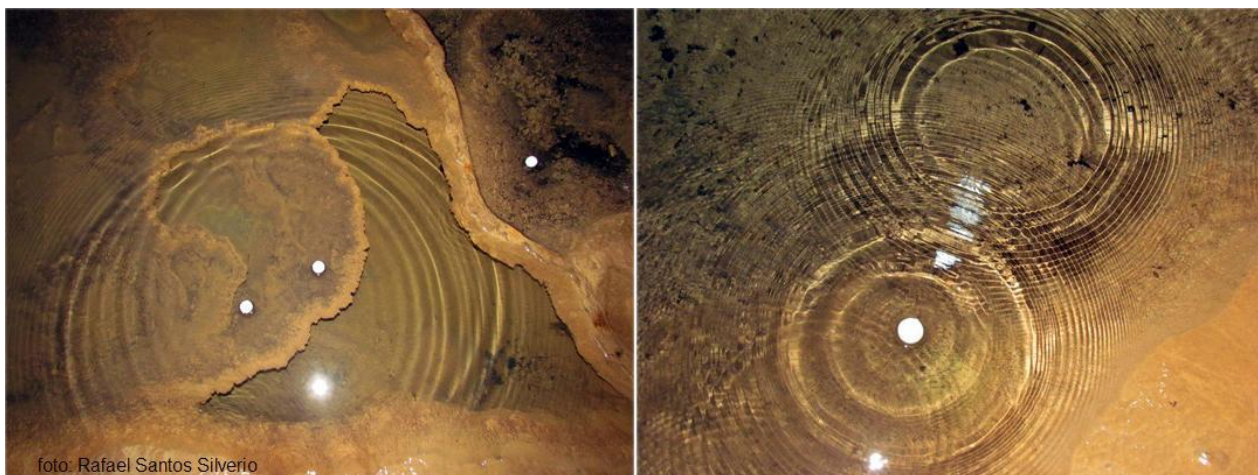


Figura 5: Ondas sofrem interferência transportando energia e não matéria.

Como podemos constatar em Silva (1997) e Silvério (2007), as formas irregulares dos espeleotemas permitem visões distintas, possíveis de serem modeladas matematicamente. Da mesma maneira que sua gênese origina a sua forma, como afirmam Lino (2001) e Auler & Zogbi (2005), também podemos constatar que essa forma apresenta ações sobre o meio que dão sentido ao seu crescimento e influenciam o desenvolvimento de outros elementos.

A figura 6 destaca a forma de um travertino e sua vista superior. A resistência à pressão da água por essa barreira, quando cheia, pode ser constatada também por seu formato peculiar. Formada por inúmeras miniconchas côncavas, como diques de contenção, dissipam a força por componentes tangentes ao seu contorno.

3.2 - Realização do experimento com esferas de isopor.

Neste trabalho de pesquisa também foram produzidas ondas sobre a superfície da água represada por travertino através de um agente exógeno simulando o gotejamento. Para isto, foi usada esfera de isopor de 35 mm lançada de uma altura de 1,5 metros. Ao tocar a superfície da água, essas esferas causaram perturbações que dissiparam ondas mecânicas sobre a água que puderam ser identificadas por fotografia.

Comprovou-se, na primeira etapa desse experimento, a ação da intensidade da queda e energia produzida na água sobre o propagar das ondas, conforme esquema representado na figura 2 e identificado na foto da figura 7. As equações diferenciais parciais de terceira ordem de Korteweg-de Vries modelam essas ondas e podem determinar seu comprimento, amplitude, frequência, velocidade etc. Porém, neste artigo, vamos nos ater às relações de segunda ordem.

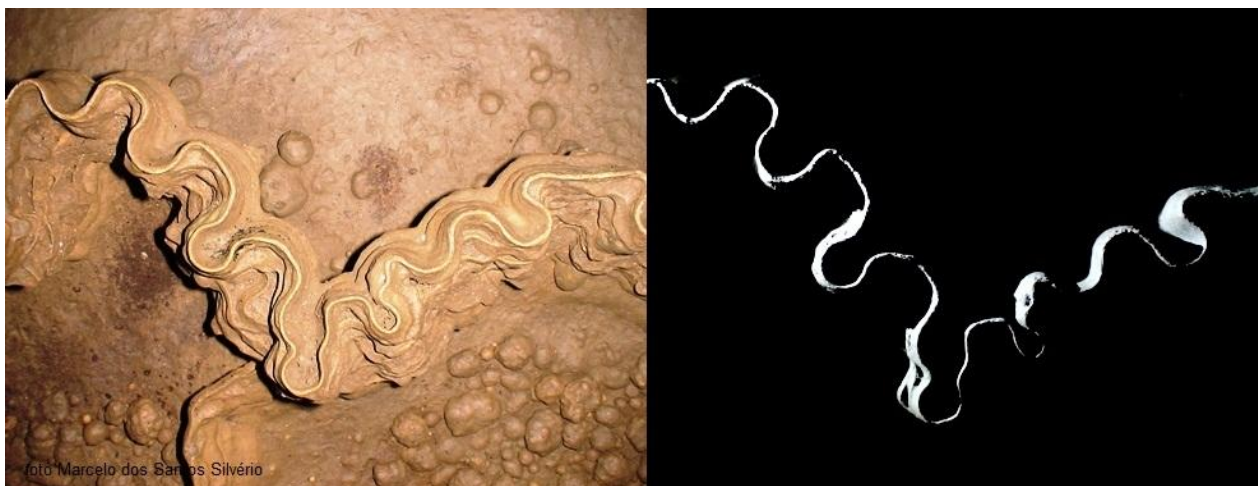


Figura 6: Duas fotos do mesmo travertino, uma com luz superior e outra com luz refletida de uma lâmpada de led sobre a sua borda.



Figura 7: Ondas produzidas sobre a água após queda livre de uma esfera de isopor.

A experiência mostrou que ocorre a produção de um trem de ondas, pois além da energia produzida na queda da esfera, o movimento da água e a massa da esfera permitem uma elasticidade vertical que produz as ondas complementares. À medida que a onda se distancia do local do impacto, o raio r dos círculos concêntricos aumenta e, com ele, o comprimento C da circunferência, na relação simplificada $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Com isso, a potência da fonte emissora de onda, na sua imagem tridimensional, distribui-se por toda o perímetro, e o corte bidimensional nos mostra vales e cristas menores, como anéis cilíndricos. A intensidade da onda superficial diminui inversamente proporcional à distância do foco. A relação entre a amplitude de onda e a distância que ela percorre também se altera, como mostra a figura 7, o que será equacionado na seção seguinte.

As ondas produzidas na superfície da água pelo experimento da queda das esferas de isopor constataram que a reflexão irregular da sua superfície faz divergir as ondas, que perdem energia. Dessa forma, a energia que essas ondas poderiam transferir para as barreiras laterais é diminuída, e fica comprovada a resistência das barreiras de travertinos.

3.3 - Modelos matemáticos de propagação das ondas.

A intensidade I do movimento ondulatório sobre a superfície da água é dada por $I = \frac{P}{\pi r^2}$, pois a sua potência P (fluxo de energia transportada por unidade de tempo) se dissipa com a área da superfície circular πr^2 . Essa potência P depende da amplitude A da onda, da frequência angular de propagação ω , da densidade do meio d e do comprimento da circunferência em que está se

propagando $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Neste caso, $P = \frac{A^2 \cdot \omega^2 \cdot d \cdot C}{2}$. Como a potência da fonte emissora não se altera, quando o raio r da circunferência C aumenta, considerando o meio isótropo, a densidade d se mantém constante assim como ω e, portanto, somente a amplitude A diminui com essa distância do foco, justificando o esquema da figura 8.

A onda mecânica distribui a energia em regiões gradativamente maiores enquanto percorre sua trajetória radial, pois na mesma unidade de tempo o número de partículas a que a energia chega é cada vez maior e cada partícula recebe menos energia, atenuando os efeitos da onda, conforme afirma Gato (2003). Neste caso, se a soma da potência (acumulada) se mantém em cada círculo, podemos dizer que a razão entre duas delas é praticamente constante: $P_1 = P_2$ (em dois pontos quaisquer 1 e 2). Logo, se a densidade do meio não altera, $A_1^2 \cdot r_1 = A_2^2 \cdot r_2$. Portanto, se r_1 for menor que r_2 , para a igualdade se manter, a amplitude A_1 deverá ser maior que a amplitude A_2 (na razão ao quadrado).

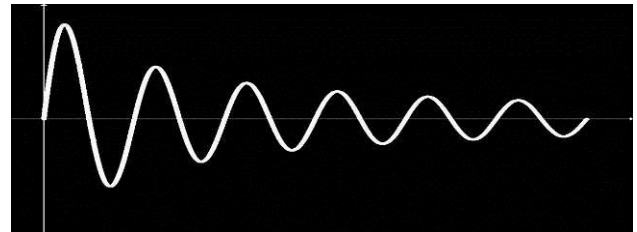


Figura 8: Modelo para representar o corte vertical na linha do deslocamento da onda sobre a superfície da água.

Neste caso podemos determinar um modelo estático para a diminuição da altura de suas cristas com aproximações bem consistentes em cortes ortogonais, numa fotografia instantânea no tempo t . Por exemplo, se obtemos na água um comprimento de onda λ e uma intensidade variada de forma que cada crista tenha amplitude k_i^{-1} da anterior ($k_i > 1$), isto é, $A(x+\lambda) = \frac{A(x)}{k_i}$, como exemplifica a figura 8, seria possível modelarmos com aproximações de funções cada fatia da onda sob e sobre o nível de água. Mas neste caso, a razão $\frac{A^2}{A_i^2} = \frac{r_i}{r}$ nos leva a um modelo de função hiperbólica. Assim, $A(r) = \frac{A_i^2 \cdot r_i}{\sqrt{r}}$. Se partirmos do ponto inicial em que r_i é zero (origem) e a amplitude inicial é A_0 , temos finalmente a hipérbole $A(r) = \frac{A_0^2}{\sqrt{r}}$. Por exemplo, se considerarmos a amplitude inicial de 10 mm, após percorrer 100 mm a amplitude da onda seria os mesmos 10 mm, porém, se percorrer 400 mm, a

amplitude da onda seria de apenas 5 mm. Porém essa função deve ter um domínio respeitado, pois para aproximarmos o raio r da origem do impacto (foco emissor da onda), ocorre uma relação caótica em que a amplitude tende a ser infinita, como mostra o limite:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{A_0^2}{\sqrt{r}} \right) = \infty$$

Este problema pode ser abandonado se considerarmos que neste modelo não estamos estudando a amplitude de cada ponto da onda numa distância de $r \in \mathbb{R}$, mas sim considerar que r terá valor enumerável e relacionado ao comprimento de onda λ , isto é, $r = k \cdot \lambda$, com $k \in \mathbb{N}$, para encontrarmos somente a altura das suas cristas.

Para estudo da propagação da onda torna-se necessário recorrer às variáveis espaço e tempo. No caso de ondas mecânicas tridimensionais, por exemplo, podem ser utilizados eixos ortogonais x , y , z e a variável tempo t , dando-nos uma função de quatro variáveis $f(x,y,z,t)$. Porém, para compreendermos o fenômeno de condução de ondas mecânicas na água, usa-se um corte longitudinal em direção ao vetor deslocamento. Assim, se y é a componente vertical (que nos dá a altura y em cada ponto x), temos que $y = f(x,t)$, ainda dependente de uma velocidade constante horizontal de propagação v , ou seja, $y = f(x - vt) = A \cdot \text{sen}(x-vt)$, conforme Gato (2003). Se conhecermos as propriedades físicas do meio isótropo em que a onda se propaga na direção do eixo x , podemos recorrer a uma equação diferencial para modelar o seu comportamento em função do tempo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Que apresente a derivada parcial de segunda ordem da função em relação ao tempo t como proporcional à derivada parcial de segunda ordem da função em relação ao ponto x , sendo que a constante de proporcionalidade é o quadrado da velocidade de propagação da onda.

Por outro lado, se desejarmos uma fotografia instantânea do corte ortogonal do meio, podemos ter outros modelos de rara beleza. A secção ortogonal na linha do raio r do trem de onda sobre a água represada pelos travertinos poderia ser modelada com aproximações num intervalo de domínio conveniente por uma função do tipo:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha \cdot \text{sen}(\beta x + \lambda)}{\xi(x)}$$

em que α , β e λ são constantes reais num determinado instante t_0 e $\xi(x)$ uma função crescente no intervalo de módulo r . Este modelo fixa o tempo e nos dá um retrato momentâneo do corte transversal, como na figura 8, sem a preocupação com a variabilidade da estrutura em um período. São modelos estáticos que apresentam o encanto das formas geométricas, como nos modelos de travertinos vistos em Silvério (2007).

3.4 - Reflexão e refração de ondas nas represas de travertinos.

Com a forma sinuosa dos travertinos, as ondas atingem seus recortes e diminuem a amplitude, dissipando a energia. Essa reflexão pode ser medida através de um modelo matemático vinculado a cada área do travertino. Para isto, é possível recorrer à álgebra vetorial e seus transformadores lineares como uma forma simplificada de apresentar a modelagem.

Consideramos o travertino da figura 9, em que a onda produzida pela queda da esfera de isopor refletiu sobre ele em cada ponto, em instantes distintos, devido à irregularidade aparente, divergindo e dissipando-se.



Figura 9: As ondas produzidas pela queda da esfera refletem nas paredes do travertino, produzindo ondas de menor intensidade que divergem.

A reflexão sobre essa região pode ser estudada em função da direção e sentido dos vetores velocidade (figura 10). Em cada ponto, traça-se uma normal à tangente imaginária na superfície vertical do travertino, obtendo o ângulo de incidência igual ao de reflexão, porém desprezando a refração da onda sobre a rocha. Como em cada ponto do travertino, por sua anomalia, apresenta uma tangente com orientação distinta, as ondas refletidas se dispersam.

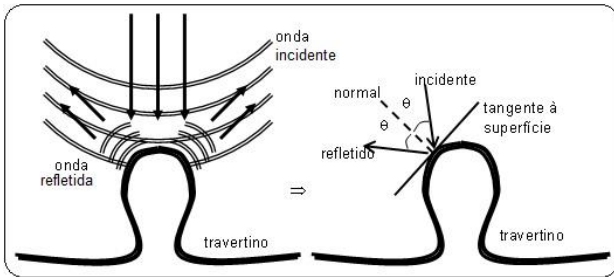


Figura 10: As ondas refletem no travertino em direções divergentes, porém em cada ponto os ângulos de incidência e reflexão θ têm medidas iguais.

Na figura 11 a seguir mostramos um modelo simplificado e aplicado à realidade. Vamos deduzir qual transformador linear, neste caso específico, pode ser usado no ponto de reflexão P.

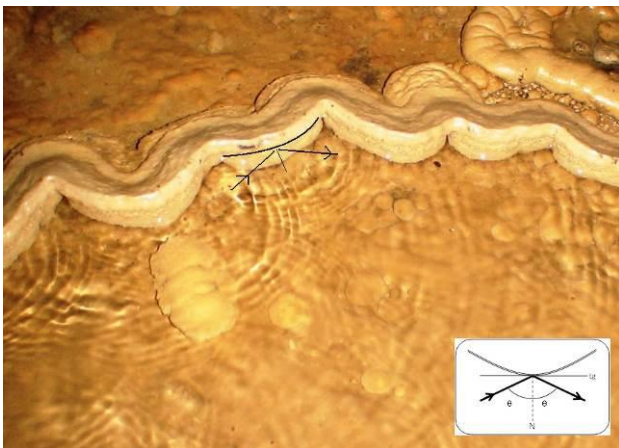


Figura 11: A fotografia mostra os ângulos de incidência e reflexão, como no esquema no canto inferior.

Nota-se que a vista superior da imagem na figura 11 permite calcular o ângulo de incidência e reflexão através de medições simples. Neste caso, considerando-se θ o ângulo de incidência, obtemos o esquema representado na própria figura.

Especificamente, se o vetor incidente é $I = (k; k.tg\theta)$, com $k \in \mathbb{R}$, a matriz de transformação linear para obtermos a direção e módulo do raio refletido seria $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ou seja, a operação $R^i = T.I^i$, em que R^i é o vetor coluna, dá a direção e o módulo do raio refletido:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k.tg\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k.tg\theta \end{pmatrix} \text{ como } -tg\theta = tg(-\theta),$$

então $R = (k; tg(-\theta))$

A queda livre da esfera de isopor sobre a superfície da água produz, pelo impacto, as ondas mecânicas que se deslocam numa propagação circular. Mas seu deslocamento depende também da profundidade e do empuxo, que altera seu comprimento de onda e sua velocidade de

propagação. Na figura 12 é possível observarmos este fenômeno, em que as circunferências concêntricas sofrem variação quando passam sobre parte do travertino submerso, que representa uma região mais rasa, porém de forma bastante tênue. É possível justificarmos o fenômeno de variação da velocidade da onda em função da profundidade com o estudo da refração, como se a onda passasse de um meio a outro. Quando as ondas vindas da região 1, com maior profundidade, passam para a região 2, com menor profundidade (travertino submerso), o módulo da velocidade de propagação da onda fica menor, como é conhecido pela Lei de Snell.



Figura 12: As ondas sofrem refração ao passar por um local mais raso, alterando sua velocidade e reflexão ao tocar numa barreira.

4 - CONCLUSÃO

Os modelos matemáticos apresentados neste artigo permitiram observar o comportamento das ondas mecânicas produzidas na superfície da água represada por travertinos. O experimento com a queda livre das esferas de isopor sobre a superfície da água causou uma instabilidade que gerou as ondas que se apresentaram, nas imagens captadas, em forma de cortes cilíndricos, com suas cristas evidenciadas e um desempenho caótico no foco.

Modelos matemáticos foram usados para representar a condução da intensidade da onda no deslocamento, atenuando a potência com o aumento do raio de propagação e assim diminuindo a amplitude até que se esvaeça. As aproximações dos resultados com regressões hiperbólicas e senoidais permitiu medir a amplitude em cada crista com o aumento do raio a partir do foco. As componentes vetoriais do deslocamento da onda em relação à normal e à tangente num ponto do travertino, foram apresentadas através de um modelo de transformação linear para os vetores incidentes e refletidos e concluiu-se que, por sua formação

tortuosa, em cada ponto essa tangente se altera, distribuindo a variabilidade e divergência da onda.

O comportamento apresentado pelas ondas mostrou-se de acordo com os resultados encontrados na literatura, mesmo que esses resultados não houvessem sido realizados em ambientes subterrâneos. Porém, o modelo clássico das ondas mecânicas expôs que as componentes controladas em laboratório não são necessariamente reproduzidas no meio ambiente. A variação da profundidade das represas de travertinos influenciou na sua propagação e a sinuosidade das suas bordas trouxe irregularidades na reflexão que contribuíram para dissipar a energia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço as pessoas que colaboraram com essa pesquisa, tanto na coleta de dados no campo quanto no que tange à abertura das portas para a realização do trabalho e na apresentação solícita diante das dúvidas que surgiram no campo da ondulatória.

Agradeço em especial ao senhor Paulo Leitão Camarero, diretor do Parque Estadual de Intervalos, à senhora Isolina Maria Leite de Almeida, diretora da Fatec Itapetininga, aos meus colegas professores de Física, Antonio Carlos, Ivo e Apolo e à equipe que me acompanhou na gruta dos Paivas, presentes na foto a seguir: Zé Fumaça e Benedito (funcionários do parque), Marcos, Elizeu e Rafael, ao meu lado na foto (membros do Grupo de Espeleologia Laje Seca).



REFERÊNCIAS

- ALVARENGA, B. e MÁXIMO, A. **Curso de Física**. Vol. 2. Editora Scipioni. São Paulo: 2007
- AULER, Augusto, ZOGBI, Leda. **Espeleologia: noções básicas**. Redespeleo. São Paulo: 2005.
- CHAFETZ, Henry, FOLK, Robert. **Travertines: depositional morphology and the bacterially constructed constituents**. Journal of Sedimentary Research: March 1984. Society for Sedimentary Geology. USA.
- GATO, J. Villasuso. **Ondas o movimiento ondulatorio: nivel bachirellato**. Física Interactiva. Madrid: 2003. In: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/Ondasbachillerato/Ondas_bach_indice.htm acessado em 25/05/2011.
- HILL, Carol; FORTI, Paolo. **Cave minerals of the world**. National Speleological Society. Huntsville, USA: 1997.
- LINO, Clayton F. **Cavernas: o fascinante Brasil subterrâneo**. Gaia. São Paulo: 2001.
- SILVA, Claudio Maurício T. **Espeleotemas: crescimentos fractais**. Revista Espeleologia Ano VIII Vol.8 p. 23-28 SEE. Ouro Preto: 1997.
- SILVÉRIO, Marcelo S. **Equacionando travertinos: das polinomiais e polares às curvas de Koch**. Anais do 29º Congresso Brasileiro de Espeleologia. SBE. Outro Preto: 2007. In: http://www.cavernas.org.br/anais29cbe/29cbe_271-279.pdf acessado em 12/04/2011.
- WREDE, Robert C e SPIEGEL, Murray R. **Cálculo avançado**. Editora Bookman. Porto Alegre: 2004.